

Вимірювання фізичних величин

На практиці нам

не відоме

істинне значення!!!

Вимірювання фізичних величин

Експеримент дає не істинне значення вимірюваної величини, а **наближене**.

Точність вимірювання визначається **близькістю** цього результату **до істинного значення** вимірюваної величини або до істинного середнього.

Кількісною мірою точності вимірювання **є похибка**.

Вимірювання фізичних величин

На практиці ...

Похибки вимірювань

Вимірювання фізичних величин

Американська нотація запису десятичних знаків «.»

Числа представлено у вигляді елементів вектора **p[1]=1.827619199225792**

Вихідні дані

http://www.k123.com.ua/jms_vv31_m3.html

http://msc.k123.com.ua/job_11.html

<http://msc.k123.com.ua/job1/v22.txt>

p[1]=1.827619199225792

p[2]=0.39036923 55955775	p[11]=0.0727866 3179984379	5308171359	p[36]=1.0315453 02310608	309864262	p[61]=1.6471629 16692849
p[3]=0.96478104 97032392	p[12]=1.2505950 36683614	85698787	p[37]=1.4972070 59533352	18508967	p[49]=1.8062891
p[4]=0.71088011 43185723	p[13]=1.9874629 15738964	214888729	p[38]=0.6401029 912938667	74997478	p[50]=1.2941603
p[5]=0.50447775 33707618	p[14]=0.0831784 9230889962	89244319	p[39]=0.9054125 790062817	70152812	p[51]=1.7026696
p[6]=0.83112544 54429657	p[15]=1.2652507 78733202	16387312	p[40]=0.2564240 158959965	47772749	p[52]=1.0885995
p[7]=1.22514777 8507649	p[16]=1.1863043 63033953	1554531	p[41]=1.3452214 02634354	4315262566	p[53]=0.0861447
p[8]=1.68362531 0671843	p[17]=1.3093155 32229015	27934825	p[42]=0.0327384 5969859712	2773539	p[54]=1.3281558
p[9]=1.01117888 9287624	p[18]=0.9414213 480673288	79002933	p[43]=1.5649600 32495102	83000334	p[55]=1.8208982
p[10]=1.3569239 90037029	p[19]=0.1038471 07329035	31954353	p[44]=0.5267330 078123171	60661411	p[56]=1.9291200
	p[20]=0.0046557 60750627902	57200707	p[45]=0.3256705 987407749	592772569	p[57]=0.1982287
	p[21]=0.6312153 925718231	913234371	p[46]=1.8471612 73506918	236483093	p[58]=0.3967444
	p[22]=1.7204590 52489623	2917822	p[47]=0.1646489 059185017	367930352	p[59]=0.5736152
	p[23]=0.0841309	8616748	p[48]=0.2429669	63117873	p[60]=1.6037525

Вимірювання фізичних величин

Американська нотація запису десятичних знаків «.»

Виділено числа

Вихідні дані	1.265250778733202	0.9368939913234371	1.702669670152812
http://www.k123.com.ua/jms_vv31_m3.html	1.186304363033953	1.54169472917822	1.088599547772749
http://msc.k123.com.ua/job_11.html	1.309315532229015	1.40910548616748	0.08614474315262566
http://msc.k123.com.ua/job1/v22.txt	0.9414213480673288	1.031545302310608	1.32815582773539
1.827619199225792	0.103847107329035	1.497207059533352	1.820898283000334
	0.004655760750627902	0.6401029912938667	1.929120060661411
0.3903692355955775	0.6312153925718231	0.9054125790062817	0.1982287592772569
0.9647810497032392	1.720459052489623	0.2564240158959965	0.3967444236483093
0.7108801143185723	0.08413095308171359	1.345221402634354	0.5736152367930352
0.5044777533707618	1.697339885698787	0.03273845969859712	1.603752563117873
0.8311254454429657	0.4659551214888729	1.564960032495102	1.647162916692849
1.225147778507649	1.382228389244319	0.5267330078123171	0.3277039625074587
1.683625310671843	1.223111616387312	0.3256705987407749	1.086443912424174
1.011178889287624	1.74228361554531	1.847161273506918	0.5640901547941612
1.356923990037029	0.303489027934825	0.1646489059185017	0.5686338251175966
0.07278663179984379	1.272335379002933	0.2429669309864262	
1.250595036683614	1.317065631954353	1.806289118508967	
1.987462915738964	1.181243957200707	1.294160374997478	
0.08317849230889962			

Вимірювання фізичних величин

Українська нотація запису десятичних знаків « , »

Вихідні дані	1,265250778733202	0,9368939913234371	1,702669670152812
http://www.k123.com.ua/jms_vv31_m3.html	1,186304363033953	1,54169472917822	1,088599547772749
http://msc.k123.com.ua/job_11.html	1,309315532229015	1,40910548616748	0,08614474315262566
http://msc.k123.com.ua/job1/v22.txt	0,9414213480673288	1,031545302310608	1,32815582773539
1,827619199225792	0,103847107329035	1,497207059533352	1,820898283000334
	0,004655760750627902	0,6401029912938667	1,929120060661411
0,3903692355955775	0,6312153925718231	0,9054125790062817	0,1982287592772569
0,9647810497032392	1,720459052489623	0,2564240158959965	0,3967444236483093
0,7108801143185723	0,08413095308171359	1,345221402634354	0,5736152367930352
0,5044777533707618	1,697339885698787	0,03273845969859712	1,603752563117873
0,8311254454429657	0,4659551214888729	1,564960032495102	1,647162916692849
1,225147778507649	1,382228389244319	0,5267330078123171	0,3277039625074587
1,683625310671843	1,223111616387312	0,3256705987407749	1,086443912424174
1,011178889287624	1,74228361554531	1,847161273506918	0,5640901547941612
1,356923990037029	0,303489027934825	0,1646489059185017	0,5686338251175966
0,07278663179984379	1,272335379002933	0,2429669309864262	
1,250595036683614	1,317065631954353	1,806289118508967	
1,987462915738964	1,181243957200707	1,294160374997478	
0,08317849230889962			

Вимірювання фізичних величин

Українська нотація запису десятичних знаків «,» Дві значащі цифра після коми

Вихідні дані	0,07	0,47	0,91	0,09
http://www.k123.com.ua/jms_vv31_m3.html	1,25	1,38	0,26	1,33
http://msc.k123.com.ua/job_11.html	1,99	1,22	1,35	1,82
http://msc.k123.com.ua/job1/v22.txt	0,08	1,74	0,03	1,93
1,83	1,27	0,30	1,56	0,20
0,39	1,19	1,27	0,53	0,40
0,96	1,31	1,32	0,33	0,57
0,71	0,94	1,18	1,85	1,60
0,50	0,10	0,94	0,16	1,65
0,83	0,00	1,54	0,24	0,33
1,23	0,63	1,41	1,81	1,09
1,68	1,72	1,03	1,29	0,56
1,01	0,08	1,50	1,70	0,57
1,36	1,70	0,64	1,09	

Вимірювання фізичних величин

Українська нотація запису десятичних знаків «,» Запис відсортированих чисел від мінімальної величини до максимальної

Вихідні дані	0,26	0,71	1,25	1,60
http://www.k123.com.ua/jms_vv31_m3.html	0,30	0,83	1,27	1,65
http://msc.k123.com.ua/job_11.html	0,33	0,91	1,27	1,68
http://msc.k123.com.ua/job1/v22.txt	0,33	0,94	1,29	1,70
0,00	0,39	0,94	1,31	1,70
0,03	0,40	0,96	1,32	1,72
0,07	0,47	1,01	1,33	1,74
0,08	0,50	1,03	1,35	1,81
0,08	0,53	1,09	1,36	1,82
0,09	0,56	1,09	1,38	1,83
0,10	0,57	1,18	1,41	1,85
0,16	0,57	1,19	1,50	1,93
0,20	0,63	1,22	1,54	1,99
0,24	0,64	1,23	1,56	

Вимірювання фізичних величин

Українська нотація запису десятичних знаків «,»

Визначаємо «ранг»

Вихідні данні	0,33	1,03	1,50
http://www.k123.com.ua/jms_vv31_m3.html	0,39	1,09	1,54
http://msc.k123.com.ua/job_11.html	0,40	1,09	1,56
http://msc.k123.com.ua/job1/v22.txt	0,47	1,18	1,60
	0,50	1,19	1,65
	0,53	1,22	1,68
	0,56	1,23	1,70
0,03	0,57	1,25	1,70
0,07	0,57	1,27	1,72
0,08	0,63	1,27	1,74
0,08	0,64	1,29	1,81
0,09	0,71	1,31	1,82
0,10	0,83	1,32	1,83
0,16	0,91	1,33	1,85
0,20	0,94	1,35	1,93
0,24	0,94	1,36	
0,26	0,96	1,38	
0,30	1,01	1,41	
0,33			

MIN = 0,00

Range = MAX – MIN = 1,99

n = 65

k = n-1

MAX = 1,99

Вимірювання фізичних величин

Українська нотація запису десятичних знаків «,»

Запис відсортированих чисел від мінімальної величини до максимальної

Медіана (загальна кількість елементів виборки $n = 65$) середній елемент

Вихідні дані	0,26	0,71	1,23	1,56
http://www.k123.com.ua/jms_vv31_m3.html	0,30	0,83	1,25	1,60
http://msc.k123.com.ua/job_11.html	0,33	0,91	1,27	1,65
http://msc.k123.com.ua/job1/v22.txt	0,33	0,94	1,27	1,68
0,00	0,33	0,94	1,27	1,68
0,03	0,39	0,94	1,29	1,70
0,07	0,40	0,96	1,31	1,70
0,08	0,47	1,01	1,32	1,72
0,08	0,50	1,03	1,33	1,74
0,09	0,53	1,09	1,35	1,81
0,10	0,56		1,36	1,82
0,16	0,57	1,09	1,38	1,83
0,20	0,57	1,18	1,41	1,85
0,24	0,63	1,19	1,50	1,93
	0,64	1,22	1,54	1,99

Вимірювання фізичних величин

Визначення інтервалу довіри для прямих вимірів

При великому числі вимірів ближче усього до істинного значення величини x лежить середнє арифметичне результатів вимірювання $\bar{x}$, яке обчислюється за формулою:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1)$$

Вимірювання фізичних величин

Українська нотація запису десятичних знаків «,»

Розрахунок середнього (загальна кількість елементів виборки $n = 65$)

Вихідні дані	0,26	0,71	1,25	1,60
http://www.k123.com.ua/jms_vv31_m3.html	0,30	0,83	1,27	1,65
http://msc.k123.com.ua/job_11.html	0,33	0,91	1,27	1,68
http://msc.k123.com.ua/job1/v22.txt	0,33	0,94	1,29	1,70
0,00	0,33	0,94	1,31	1,70
0,03	0,39	0,94	1,31	1,72
0,07	0,40	0,96	1,32	1,74
0,08	0,47	1,01	1,33	1,81
0,08	0,50	1,03	1,35	1,82
0,09	0,53	1,09	1,36	1,83
0,10	0,56	1,09	1,38	1,85
0,16	0,57	1,18	1,41	1,93
0,20	0,57	1,19	1,50	1,99
0,24	0,63	1,22	1,54	
	0,64	1,23	1,56	

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = (64,02 / 65) = 0,98492307692308 = 0,98$$

Вимірювання фізичних величин

Визначення інтервалу довіри для прямих вимірів

Розглянемо правила обробки результатів вимірювань за наявністю лише випадкових похибок.

Для отримання коректних не зміщених статистичних оцінок:

- виміри із грубою похибкою вимірювання вилучено з виборки;
- систематична похибка виявлена й відповідні значення вимірів скореговані (вплив похибки — компенсовано)

Вимірювання фізичних величин

Визначення інтервалу довіри для прямих вимірів

Для оцінки відхилення вибіркового середнього $\bar{x}$ від істинного значення вимірюваної величини x вводиться S - середня квадратична похибка середнього, яка обчислюється за формулою:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} \quad (2)$$

Вимірювання фізичних величин

Розрахунок середня квадратична похибка середнього (загальна кількість елементів виборки $n = 65$)

Вихідні данні
http://www.k123.com.ua/jms_vv31_m3.html
http://msc.k123.com.ua/job_11.html
<http://msc.k123.com.ua/job1/v22.txt>

0,00

0,03

0,07

0,08

0,08

0,09

0,10

0,10

0,20

0,24

0,26

0,30

0,33

0,33

0,33

0,40

0,47

0,50

0,53

0,56

0,57

0,57

0,63

0,64

0,71

0,83

0,91

0,94

0,94

0,96

1,01

1,03

1,09

1,09

1,18

1,19

1,22

1,23

1,35

1,27

1,27

1,29

1,31

1,32

1,33

1,35

1,36

1,38

1,41

1,50

1,54

1,56

1,60

1,65

1,68

1,70

1,70

1,72

1,74

1,81

1,82

1,83

1,85

1,93

1,99

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = (64,02 / 65) = 0,98492307692308 = 0,98$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{(0 - 0,98)^2 + \dots + (1,99 - 0,98)^2}{65 \cdot (65 - 1)}} = 0,074$$

Вимірювання фізичних величин

Визначення інтервалу довіри для прямих вимірів

Завдання вимірювання – оцінити величину x , тобто вказати інтервал значень, до якого із заданою ймовірністю довіри α (іноді використовують іншу назву α – коефіцієнт надійності) потрапляє вимірювана величина x_i .

Межі інтервалу, що визначаються таким чином:

Вимірювання фізичних величин

Визначення інтервалу довіри для прямих вимірів

Межі інтервалу, що визначаються таким чином:

$$x = \bar{x} \pm t_{(\alpha,n)} \cdot S \quad (6)$$

де ,

$t_{(\alpha,n)}$ – коефіцієнт Стюдента, який залежить від імовірності довіри α та числа вимірів n (табл. 1);

$$\Delta x = t_{(\alpha,n)} \cdot S.$$

Вимірювання фізичних величин

Визначення інтервалу довіри для прямих вимірів

Таблиця 1.

Коефіцієнт Стюдента з k ступенями свободи

$k \backslash p$	0,9	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999
1	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	318,3
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,21
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	5,893
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,500	4,785
8	1,397	1,860	2,306	2,897	3,355	4,501
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297
10	1,372	1,813	2,228	2,764	3,169	4,144
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930
14	1,345	1,761	2,145	2,625	2,977	3,787
16	1,337	1,750	2,120	2,584	2,921	3,686
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611
20	1,325	1,725	2,083	2,528	2,845	3,557

$$k = n - 1$$

Вимірювання фізичних величин

Розрахунок середня квадратична похибка середнього (загальна кількість елементів виборки $n = 65$)

Вихідні дані	0,26	0,71	1,25	1,60	$\bar{x} = 0,98$
http://www.k123.com.ua/jms_vv31_m3.html	0,30	0,83	1,27	1,65	
http://msc.k123.com.ua/job_11.html	0,33	0,91	1,27	1,68	
http://msc.k123.com.ua/job1/v22.txt	0,33	0,94	1,29	1,70	$s = 0,074$
0,00	0,33	0,94	1,29	1,70	
0,03	0,39	0,94	1,31	1,70	
0,07	0,40	0,96	1,32	1,72	
0,08	0,47	1,01	1,33	1,74	
0,08	0,50	1,03	1,35	1,81	
0,09	0,53	1,09	1,36	1,82	
0,10	0,56	1,09	1,38	1,83	
0,16	0,57	1,18	1,41	1,85	
0,20	0,57	1,19	1,50	1,93	
0,24	0,63	1,22	1,54	1,99	
	0,64	1,23	1,56		

Критерій Ст'юдента t

Число ступенів свободи f	Рівень значимості α			
	0,10	0,05	0,01	0,001
1	6,31	12,70	63,70	637,00
2	2,92	4,30	9,92	31,60
3	2,35	3,18	5,84	12,90
4	2,13	2,78	4,60	8,61
5	2,01	2,57	4,03	6,86
6	1,94	2,45	3,71	5,96
7	1,89	2,36	3,50	5,40
8	1,86	2,31	3,36	5,04
9	1,83	2,26	3,25	4,78
10	1,81	2,23	3,17	4,59
11	1,80	2,20	3,11	4,44
12	1,78	2,18	3,05	4,32
13	1,77	2,16	3,01	4,22
14	1,76	2,14	2,98	4,14
15	1,75	2,13	2,95	4,07
16	1,75	2,12	2,92	4,01
17	1,74	2,11	2,90	3,96
18	1,73	2,10	2,88	3,92
19	1,73	2,09	2,86	3,88
20	1,73	2,09	2,85	3,85
21	1,72	2,08	2,83	3,82
22	1,72	2,07	2,82	3,79
23	1,71	2,07	2,81	3,77
24	1,71	2,06	2,80	3,74
25	1,71	2,06	2,79	3,72
26	1,71	2,06	2,78	3,71
27	1,71	2,05	2,77	3,69
28	1,70	2,05	2,76	3,66
29	1,70	2,05	2,76	3,66
30	1,70	2,04	2,75	3,65
40	1,68	2,02	2,70	3,55
60	1,67	2,00	2,66	3,46
120	1,66	1,98	2,62	3,37
∞	1,64	1,96	2,58	3,29

Вимірювання фізичних величин

Розрахунок середня квадратична похибка середнього (загальна кількість елементів виборки $n = 65$)

Вихідні дані
http://www.k123.com.ua/jms_vv31_m3.html
http://msc.k123.com.ua/job_11.html
<http://msc.k123.com.ua/job1/v22.txt>

0,00

0,03

0,07

0,08

0,08

0,09

0,10

0,16

0,20

0,24

0,26

0,30

0,33

0,33

0,39

0,40

0,47

0,50

0,53

0,56

0,57

0,57

0,61

0,64

0,71

0,83

0,91

0,94

0,94

0,96

1,01

1,03

1,09

1,09

1,18

1,19

1,22

1,23

1,25

1,27

1,27

1,29

1,31

1,32

1,33

1,35

1,36

1,38

1,41

1,50

1,54

1,56

1,60

1,65

1,68

1,70

1,70

1,72

1,74

1,81

1,82

1,83

1,85

1,93

1,99

$$\bar{x} = 0,98$$

$$s = 0,074$$

$$t_{(\alpha,n)} = t_{(0.95,64)} = 2,0$$

$$x = 0,98 \pm 2,0 \cdot 0,074 = 0,98 \pm 0,15$$

$$x = 0,98 \pm 0,15$$

Вимірювання фізичних величин

ГІСТОГРАМА $\bar{x} = 0,98$ $s = 0,074$ $x = 0,98 \pm 0,15$

$n = 65$

$k = 64$

Range = 1,99

Вихідні дані

$$\text{Інтервал} = \frac{\text{Range}}{6} = \frac{1,99}{6} = 0,331667$$

1	2	3	4	5	6	
0	0,331667	0,663333	0,995	1,326667	1,658333	1,99
	0,03					
	0,07		0,40		0,96	
	0,08		0,47		1,01	
	0,08		0,50		1,03	
	0,09		0,53		1,09	
	0,10		0,56		1,09	
	0,16		0,57		1,18	
	0,20		0,57		1,19	
	0,24		0,63		1,22	
			0,64		1,23	

$n_6 = 10$

$n_6 = 12$

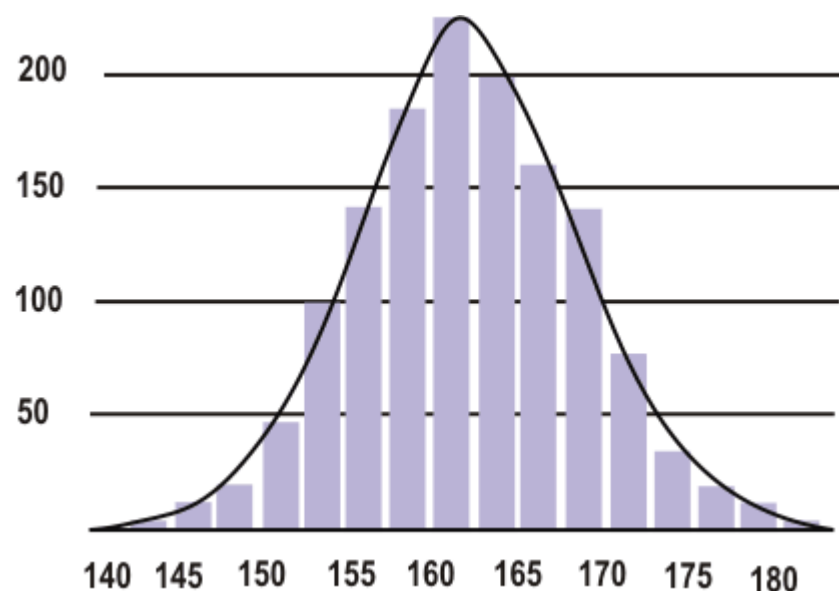
1,60
1,65
1,68
1,70
1,70
1,72
1,74
1,81
1,82
1,83
1,85
1,93
1,99

Основи статистики та аналізу даних

Міри центральної тенденції

Нормальний розподіл (Normal distribution)

Для прикладу, візьмемо розподіл зросту жінок певного віку в певній країні. Найбільш популярними будуть значення, що відповідають «середньому зросту», а екстремальних значень – дуже низький зріст і дуже високий – буде дуже мало.



Розподіл зросту (умовний)

Основи статистики та аналізу даних

Міри центральної тенденції

У нормальному розподілі, більша частина значень даних має тенденцію до групування, «кластеризації» довкола середнього значення.

Чим далі значення від середнього – тим менша ймовірність його появи.

Звичайно, розподіли в реальному житті абсолютно точно не відповідають нормальному. Але ви здивуєтеся, як багато явищ, у розподілі за своїми параметрами надзвичайно наближаються до нормального розподілу.

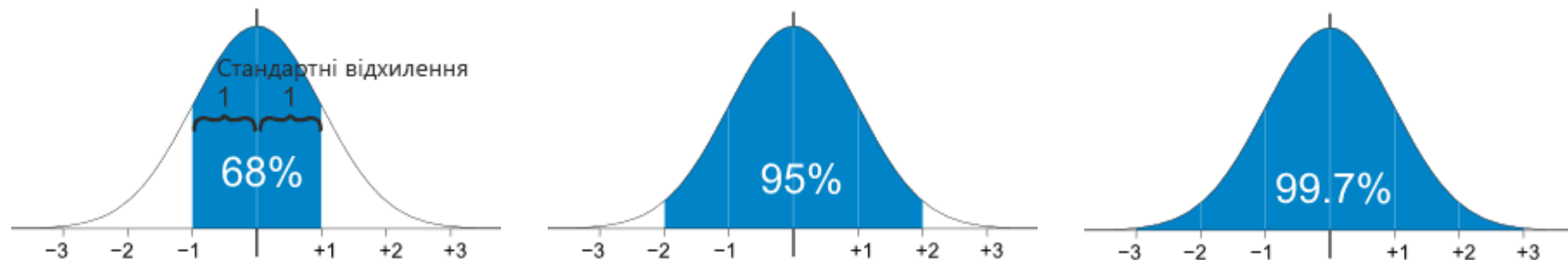
Центральна гранична теорема теорії ймовірності свідчить про те, що сукупність незалежних, приблизно однаково розподілених величин має нормальний розподіл.

Основи статистики та аналізу даних

Міри центральної тенденції

Нормальний розподіл (Normal distribution)

Розподіл у якому **всі три міри центральної тенденції збігаються** – тобто середнє дорівнює медіані і дорівнює моді, **називається нормальним** (є ще інші характеристики нормального розподілу, але про них згодом – а ці є основними).



При цьому, **95% значень** – в межах двох стандартних відхилень від середнього, а **99.7%** – в межах трьох стандартних відхилень.