

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Київський національний університет
будівництва і архітектури

**ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА РІДИНИ І ГАЗУ.
ГІДРОСТАТИКА. ОСНОВИ РОБОТИ
В СИСТЕМІ АНАЛІТИЧНИХ РОЗРАХУНКІВ
МАХІМА. ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ**

Методичні вказівки
до виконання індивідуальної роботи
для студентів, які навчаються за напрямом підготовки
6.060101 «Будівництво» спеціальний вид діяльності
«Водопостачання і водовідведення»

Київ 2014

УДК 621.22(075.8)

ББК 30.123.73

T38

Укладач Ю.Д. Копаниця, канд. техн. наук, доцент

Рецензент Є.І. Павлов, канд. техн. наук, доцент

Відповідальний за випуск А.М. Кравчук, д-р техн. наук, професор

Затверджено на засіданні кафедри водопостачання та водовідведення, протокол № 1 від 30 вересня 2013 року.

Видається в авторській редакції.

Технічна механіка рідини і газу. Гідростатика. Основи роботи в T38 системі аналітичних розрахунків MAXIMA. Приклади і задачі: методичні вказівки до виконання індивідуальної роботи / уклад: Ю.Д. Копаниця. – К.: КНУБА, 2014. – 32 с.

Розглянуто основні задачі гідростатики: тиск в точці й передача тиску в рідині, визначення сил тиску на плоскі і криволінійні поверхні, закон Архімеда й умови плавання тіл, тиск і сили тиску при відносній рівновазі рідини, особливості інженерного розрахунку в сучасних програмах комп'ютерної алгебри. Наведено приклади розв'язання задач в системі MAXIMA: формули, тексти програм розрахунку, відповіді.

Призначено для студентів, які навчаються за напрямом підготовки 6.060101 "Будівництво".

© КНУБА, 2014

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Програма навчального курсу «Технічна механіка рідини і газу» для студентів спеціалізації «Водопостачання і водовідведення» передбачає виконання розрахунково-графічних вправ.

Сучасний рівень розвитку персональних мікропроцесорних мобільних комунікаційних пристроїв, технології хмарових сервісів і впровадження Web-інтерфейсів для відомих систем комп'ютерної алгебри дозволяє впроваджувати мобільні розрахунки навчальних задач в звичайних аудиторіях. Простота і швидкість комп'ютерного розрахунку дають змогу кожному студенту самостійно вирішувати на практичних заняттях більшу кількість індивідуальних завдань і отримувати персональну консультацію викладача.

У методичних вказівках представлено приклади всіх основних типових розрахунків інженерних задач, які входять в розділ гідростатики [1; 2; 3]. Розглянуто розв'язання задач підвищеної складності, наведено тексти програм і методичні поради раціональної технології реалізації розрахунків в середовищі системи MAXIMA [8; 9 11].

Наведено основні розрахункові формули розділів гідростатики: основне рівняння гідростатики й передача тиску в рідині, визначення рівнодіючої сили гідростатичного тиску на плоскі й криволінійні поверхні методом трьох команд K123 і стандартні алгоритми розрахунку, визначення умов плавання тіл й остійність, тиск й сила тиску в умовах відносної рівноваги рідини. У додатки включено основні розрахункові формули метода K123 [4; 5; 6; 7].

ПРОГРАМА КОМП'ЮТЕРНОЇ АЛГЕБРИ MAXIMA

MAXIMA належить до вільного програмного продукту й відповідає ліцензії GPL [12], дозволяє безкоштовно, без порушення авторських прав, використовувати комп'ютерні розрахунки на персональних пристроях. Програма комп'ютерної алгебри MAXIMA підтримує всі сучасні операційні системи без обмежень: Windows, Linux, Unix, Android [13].

Використовуючи мобільний інтернет і Web-інтерфейс програми, розрахунки доступні на звичайному мобільному телефоні без операційної системи [10]. На сучасних смартфонах із системою Android можливо використовувати і локальну програму, і Web-інтерфейс через мобільний інтернет або WiFi мережу.

УМОВНІ ПОЗНАЧЕННЯ

Символ	Назва	Одиниця виміру
1	2	3
p_a	атмосферний тиск	Па
$p_{\text{ман}}$	манометричний тиск	Па
P	сила тиску	Н
ω	площа поверхні	м^2
α, β, \dots	кут	$^\circ$, рад
φ	кут нахилу рівнодіючої сили тиску відносно горизонтальної осі	$^\circ$, рад
ρ	густина рідини	$\text{кг}/\text{м}^3$
g	прискорення вільного падіння	$\text{м}/\text{с}^2$
I_C	момент інерції відносно осі, що проходить через центр ваги поверхні	м^4
h_C	глибина занурення центру ваги поверхні	м
h_D	глибина занурення центра тиску	м
H, h	висота	м
W	об'єм тіла тиску	м^3
P_x	горизонтальна складова сили тиску, проекція сили тиску на вісь x	Н
P_y	горизонтальна складова сили тиску, проекція сили тиску на вісь y	
P_z	вертикальна складова сили тиску, проекція сили тиску на вісь z	Н
P_i	сила тиску на i -й шар поверхні	Н
$m(P_i)$	статичний момент сили тиску на i -й шар поверхні	Н · м
$m(P)$	статичний момент рівнодіючої сили тиску на поверхню	Н · м

Закінчення таблиці

1	2	3
x, x_1, x_i	координата точки прийнятої абсолютної або локальної системи координат(абсциса)	М
y, y_1, y_i	координата точки прийнятої абсолютної або локальної системи координат(абсциса)	М
z, z_1, z_i	координата точки прийнятої абсолютної або локальної системи координат (ордината)	М
h_{D_x}	координата (абсциса) центра тиску відносно початку прийнятої абсолютної (або локальної) системи координат	М
h_{D_y}	координата (абсциса) центра тиску відносно початку прийнятої абсолютної (або локальної) системи координат	М
h_{D_z}	глибина занурення центра тиску відносно п'єзометричної поверхні для прийнятої абсолютної (або локальної) системи координат	М
x, y, z	позначення прямокутної (декартової) системи координат	—
$h_1, h_2, \dots, h_i \dots$	глибина занурення центра ваги i -го шара поверхні	М
D	центр тиску	—
Δh	висота i -го шара поверхні	М
dh	диференціал висоти шара поверхні	М
$C(x; z)$	координати точки	М
dP	диференціал сили тиску	Н
b_i	ширина i -го шара поверхні	М
h_i	глибина занурення центра ваги i -го шара поверхні відносно п'єзометричної поверхні	М
локальна система координат xOz	нульова точка прийнятої локальної системи координат відраховується відносно п'єзометричної поверхні, або нерухомої (характерної) точки розглянутої поверхні (її грані)	-

ЗАДАЧІ І ПРИКЛАДИ ПРОГРАМ

Задача 1.1

Задано: атмосферний тиск на вільну поверхню рідини в точці А, $h_1 = 4 \text{ м}$, $h_2 = 6 \text{ м}$, $h_3 = 3 \text{ м}$, $h_4 = 5 \text{ м}$, $h_5 = 2 \text{ м}$, $\rho_{\text{ВОДИ}} = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{\text{ПОВ}} = 1,2 \text{ кг/м}^3$ (рис. 1). **Визначити** абсолютний тиск в точках В, С, D. **Визначити** абсолютну та відносну помилку в розрахунках без урахування тиску стовпчика повітря.

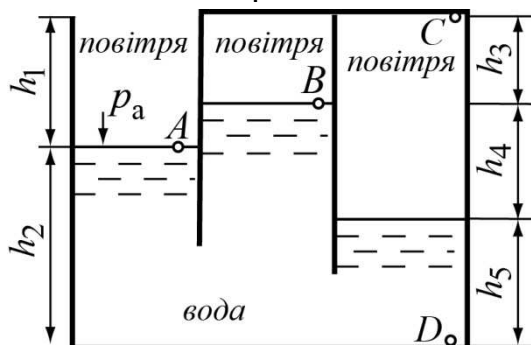


Рис. 1.

Програма в MAXIMA № 1.1

```
(%i30) ro_v:1000.0; ro_p:1.2; h1:4.0; h2:6.0; h3:3.0; h4:5.0;
h5:2.0; P_a:101030.0;
```

```
(%o30) 1000.0
```

```
(%o31) 1.2
```

```
(%o32) 4.0
```

```
(%o33) 6.0
```

```
(%o34) 3.0
```

```
(%o35) 5.0
```

```
(%o36) 2.0
```

```
(%o37) 101030.0 (%i47) P_b:P_a-ro_v*9.81*(h1-h3);
```

```
P_d:P_a+ro_v*9.81*(h2); P_c:P_a+ro_v*9.81*(h2-h5)-ro_p*9.81*(h3-h4);
```

```
(%o47) 91220.0
```

```
(%o48) 159890.0
```

```
(%o49) 140293.544
```

```
(%i55) P_c_p:P_a+ro_v*9.81*(h2-h5);
```

```
Er_rel:(P_c-
```

```
P_c_p)/P_c*100; Er_abs:(P_c-P_c_p);
```

```
(%o55) 140270.0
```

```
(%o56) 0.016781955412
```

```
(%o57) 23.543999999999441
```

Created with wxMaxima.

Запитання для самоперевірки: - які інші види рівнянь можна скласти для розрахунку тисків?

як перевірити, що в наведеному рішенні задачі враховано тиск стовпчика повітря над точкою В?

Задача 1.2

Задано: атмосферний тиск на вільну поверхню рідини, $h_1 = 3,0$ м, $h_2 = 1,2$ м, $h_3 = 1,5$ м, $h_4 = 0,9$ м, $h_5 = 1,3$ м, $\rho_{\text{води}} = 1000$ кг/м³, $\rho_{\text{пов}} = 1,2$ кг/м³, $\rho_{\text{наф}} = 970$ кг/м³ (рис.2). **Визначити** абсолютний тиск в точках А, В, С, D, Е.

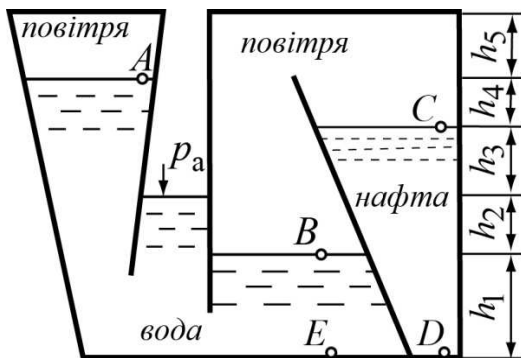


Рис. 2.

Програма в MAXIMA № 1.2

```

%i99)      ro_v:1000.0; ro_n:970.0; ro_p:1.2; h1:3.0; h2:1.2; h3:1.5;
h4:0.9; h5:1.3; P_a:101030.0;
(%o99)    1000.0
(%o100)   970.0
(%o101)   1.2
(%o102)   3.0
(%o103)   1.2
(%o104)   1.5
(%o105)   0.9
(%o106)   1.3
(%o107)   101030.0
(%i108)   P_A:P_a-ro_v*9.81*(h4+h3); P_E:P_a+ro_v*9.81*(h1+h2);
P_B:P_a+ro_v*9.81*(h2);
(%o108)   77486.0
(%o109)   142232.0
(%o110)   112802.0
(%i111)   P_C:P_B; P_D:P_C+ro_n*9.81*(h1+h2+h3);

```

```
(%o111) 112802.0
```

```
(%o112) 167041.49
```

Created with wxMaxima.

Запитання для самоперевірки: - які інші види рівнянь можна скласти для розрахунку тисків?

як перевірити, чи враховано в наведеному рішенні задачі тиск стовпчика повітря над точками А, В і С?

Задача 1.3

Задано: вакууметричний тиск на вільну поверхню рідини $p_{\text{вак}} = 10 \text{ кПа}$, манометричний тиск $p_{M_A} = 65 \text{ кПа}$, $h_1 = 0,55 \text{ м}$, $\rho_{\text{води}} = 1000 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{\text{рт}} = 13600 \text{ кг/м}^3$ (рис.3). **Визначити** манометричний тиск p_{M_B} , висоту стовпчика води h_2 .

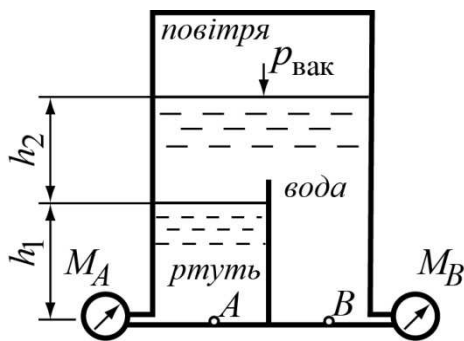


Рис. 3.

Програма в MAXIMA № 1.3

```
i9) kill(all); ro_v:1000.0; ro_rt:13600.0; h1:0.55; P_vak:10000.0;  
P_mA:65000.0; P_a:101030.0;
```

```
(%o0) done
```

```
(%o1) 1000.0
```

```
(%o2) 13600.0
```

```
(%o3) 0.55
```

```
(%o4) 10000.0
```

```
(%o5) 65000.0
```

```
(%o6) 101030.0
```

```
(%i7) h2:((P_a+P_mA)-(P_a-P_vak+ro_rt*9.81*h1))/(ro_v*9.81);
```

```
(%o7) 0.16525993883792
```

```
(%i8) P_mB:P_a-(P_a-P_vak+(ro_v*9.81*(h1+h2)));
```

```
(%o8) 2983.2999999999988
```

Created with wxMaxima.

Запитання для самоперевірки: - при якому значенні h_2 в точці В буде вакууметричний тиск?

- точки А і В лежать в одній площині, чи однакові тиски в цих точках і чому?

Задача 1.4

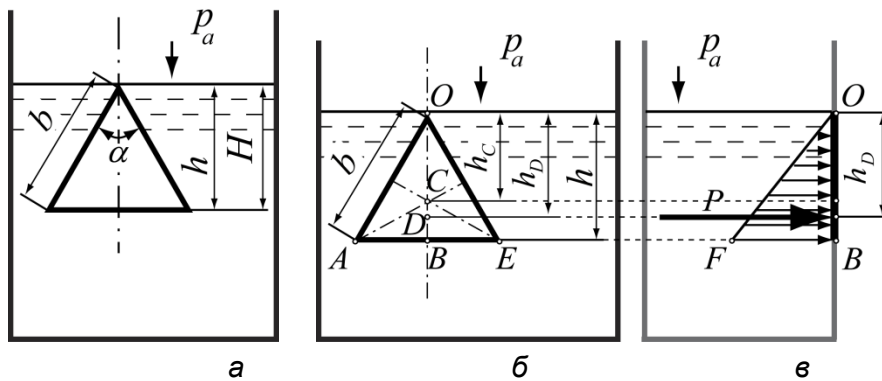


Рис. 4. Сила тиску на трикутну плоску кришку бокової грані резервуара: а - форма кришки – правильний трикутник із стороною b ; б, в - переріз резервуара і епюри тиску: h — висота стовпчика рідини, b — ширина бокової грані кришки, p_a — тиск на вільну поверхню рідини, h_C — глибина занурення центра ваги змоченої поверхні AOE , положення центра ваги змоченого периметра AOE точка C , h_D — глибина занурення центра тиску P відносно точки O , положення центра ваги епюри тиску OFB точка D

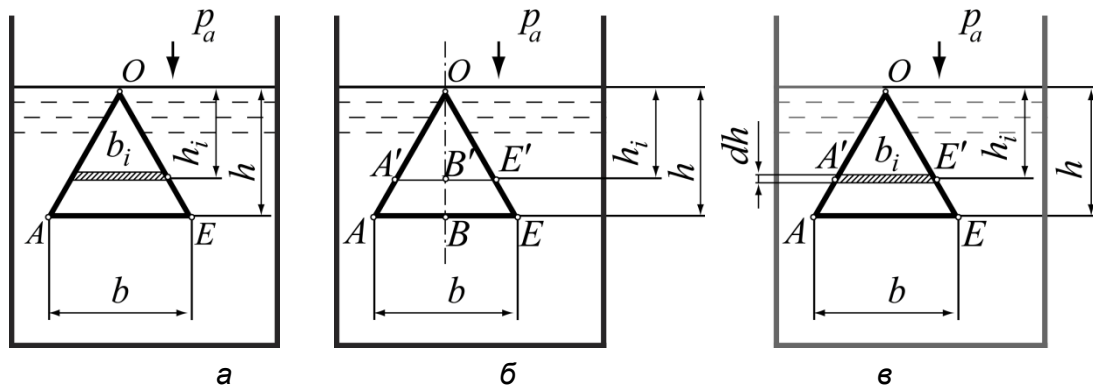


Рис. 5. Залежність ширини епюри тиску від глибини занурення: а – змінна по висоті h_i ширина епюри тиску b_i ; б – подібні трикутники $\Delta A'OE'$ і ΔAOE ; в – висота dh i -го шара шириною b_j на глибині h_j

Задано: вертикальна трикутна кришка закриває боковий отвір бака з водою, атмосферний тиск на вільну поверхню рідини $p_0 = 101,03 \text{ кПа}$. Розміри кришки: висота $H = 0.6 \text{ м}$, ширина $b = 0.4 \text{ м}$. Рівень води змінюється в межах висоти трикутної кришки $h_1 = 0.1 - 0,6 \text{ м}$, густина води

$\rho_{\text{води}} = 1000 \text{ кг/м}^3$. **Визначити** методом трьох команд K123 [2, задача № 2, с. 7] функціональну залежність величини сили гідростатичного тиску і зміни координати точки дії відносно статичної точки O в основі кришки. Побудувати графік функціональної залежності координати fhd від висоту стовпчика води $fhd = F(h)$.

Програма в MAXIMA № 1.4

```
(%i14) kill(all); ro_v:1000.0; gi:9.81; H:0.6; B:0.4; P_m:5000.0;
h1:0.5;
```

```
(%o0) done
(%o1) 1000.0
(%o2) 9.8100000000000001
(%o3) 0.6
(%o4) 0.4
(%o5) 5000.0
(%o6) 0.5
```

```
(%i7) P:integrate(ro_v*gi*(h1-h)*((B*(H-h))/H),h,0,h1);
fP(h1):=integrate(ro_v*gi*(h1-h)*((B*(H-h))/H),h,0,h1);
```

```
(%o7) 354.25000000000001
```

```
(%o8) fP(h1) := 
$$\int_0^{h1} ro\_v \ gi \ (h1-h) \frac{B(H-h)}{H} dh$$

```

```
(%i9) mP:integrate(ro_v*gi*(h1-h)*h*(B*(H-h)/H),h,0,h1);
fmP(h1):=integrate(ro_v*gi*(h1-h)*h*(B*(H-h)/H),h,0,h1);
```

```
(%o9) 47.687500000000001
```

```
(%o10) fmP(h1) := 
$$\int_0^{h1} ro\_v \ gi \ (h1-h) \ h \ \frac{B(H-h)}{H} dh$$

```

```
(%i11) hD:mP/P; fhD(h1):=fmP(h1)/fP(h1);
```

```
(%o11) 0.13461538461538
```

```
(%o12) fhD(h1) := 
$$\frac{fmP(h1)}{fP(h1)}$$

```

```
(%i13) First:fhD(0.1);
```

```
(%o13) 0.032352941176471
```

```
(%i14) plot2d(fhD(x),[x,0.1,0.6]);
```

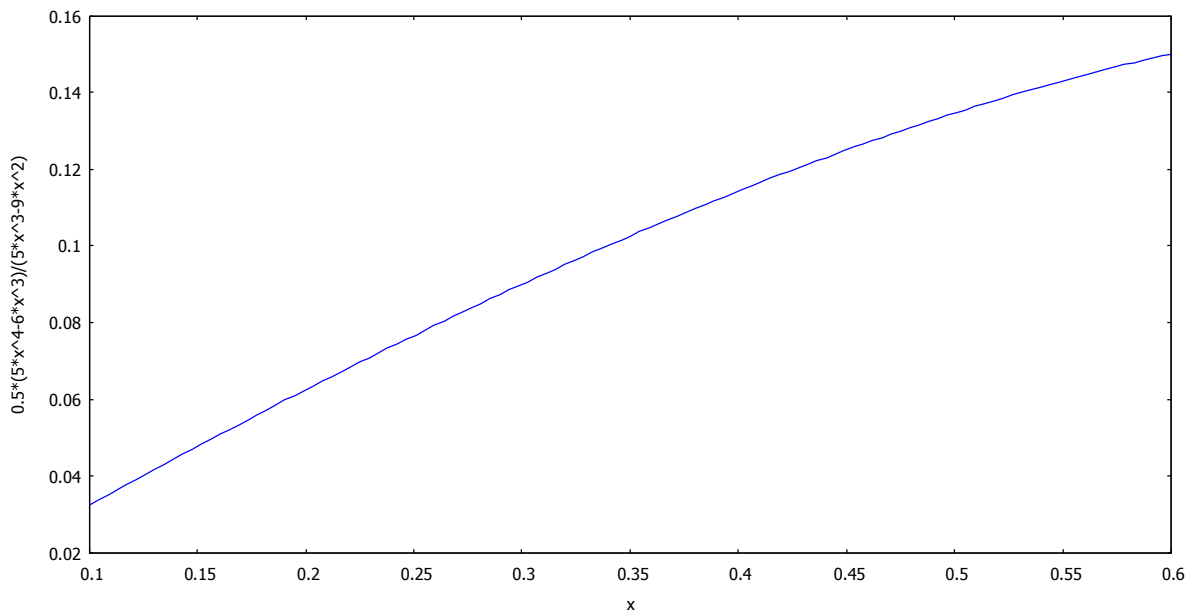


Рис. 6.

Created with wxMaxima.

Запитання для самоперевірки:

як врахувати манометричний тиск на вільну поверхню рідини?

як врахувати вакууметричний тиск на вільну поверхню рідини?

як врахувати манометричний тиск на вільну поверхню рідини для зануреної кришки?

як врахувати зміну форми зануреної кришки (квадрат, півкола, коло, перевернутий трикутник), загальний випадок – довільна форма плоскої кришки задана аналітичними рівняннями?

Задача 1.5

Задано: вертикальна трикутна кришка закриває боковий отвір бака з водою, манометричний тиск на вільну поверхню рідини $p_M = 50,0 \text{ кПа}$ (рис. 7). Розміри кришки: висота $H = 0.6 \text{ м}$, ширина $b = 0.4 \text{ м}$. Рівень води $h_1 = 0,5 \text{ м}$, густина води $\rho_{\text{води}} = 1000 \text{ кг/м}^3$. **Визначити** методом трьох команд K123 величину й точку прикладання рівнодійної сили тиску. Побудувати епюру гідростатичного тиску.

Методичні вказівки. Рівняння метода K123 для розв'язання задачі наведено в методичних вказівках [2, задача № 2, с. 7-9].

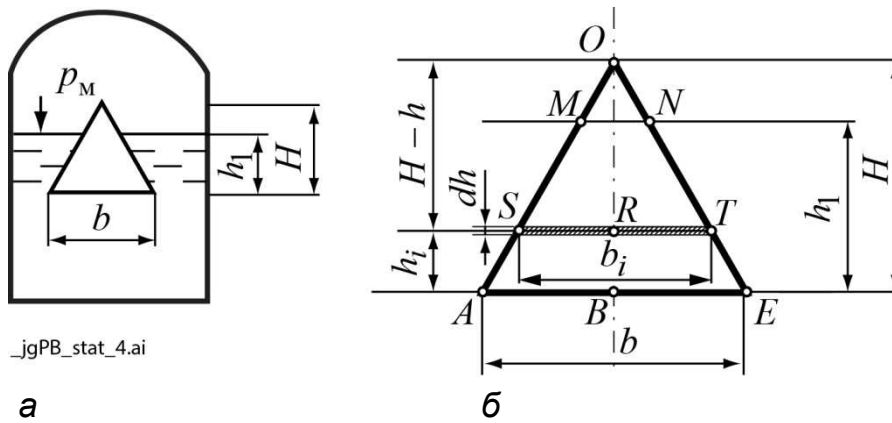


Рис. 7. Трикутна кришка в резервуарі з водою, на вільну поверхню рідини діє манометричний тиск: а - вільна поверхня рідини нижче вершини кришки; б - змінна по висоті h_i ширина епюри тиску b_i , подібні трикутники ΔAOB і ΔSOR , висота dh і-го шара шириною b_i на відстані h_i змінюється в межах від AE до MN

Програма в MAXIMA № 1.5

```
i10) kill(all); ro_v:1000.0; gi:9.81; H:0.6; b:0.4; P_m:5000.0; h1:0.5;
(%o0) done
(%o1) 1000.0
(%o2) 9.8100
(%o3) 0.6
(%o4) 0.4
(%o5) 5000.0
(%o6) 0.5
(%i7) P:integrate((ro_v*gi*(h1-h)+P_m)*((b*(H-h))/H),h,0,h1);
(%o7) 937.583
(%i8) mP:integrate((ro_v*gi*(h1-h)+P_m)*(h1-h)*(b*(H-h)/H),h,0,h1);
(%o8) 309.993
(%i9) hD:mP/P;
(%o9) 0.331
```

Задача 1.6

Задано: вертикальна кришка закриває круглий отвір бака з водою, манометричний тиск на вільну поверхню рідини $p_M = 5,0 \text{ кПа}$. Радіус кришки $R = 0,15 \text{ м}$, рівень води $h_1 = 0,1 \text{ м}$, густина $\rho_{\text{води}} = 1000 \text{ кг/м}^3$ (рис.8). **Визначити** методом трьох команд K123 величину й точку прикладання рівнодійної сили тиску. Побудувати епюру гідростатичного тиску.

Методичні вказівки. Рівняння метода K123 для розв'язання задачі наведено в методичних вказівках [2, задача № 2, с. 7-9].

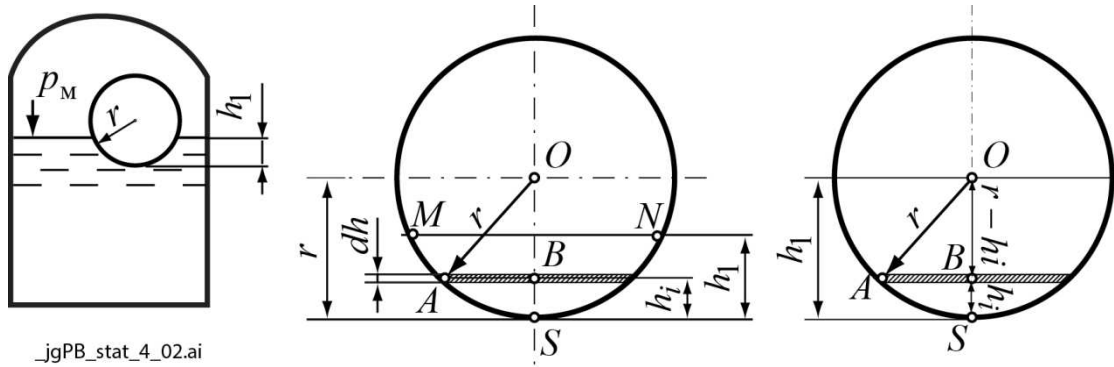


Рис. 8

Програма в MAXIMA № 1.6

```
(%i9) kill(all); ro_v:1000.0; gi:9.81; r:0.15; p_m:5000.0; h1:0.1;
(%o0) done
(%o1) 1000
(%o2) 9.810
(%o3) 0.15
(%o4) 5000
(%o5) 0.1
(%i6) P:integrate((ro_v*gi*(h1-h)+p_m)*(2.0*sqrt(r^2-(r-h)^2)),h,0,h1),numer;
(%o6) 111.5081
(%i7) mP:integrate((ro_v*gi*(h1-h)+p_m)*(2.0*sqrt(r^2-(r-h)^2))*(h1-h),h,0,h1),numer;
(%o7) 4.7595
(%i8) hD:mP/P;
(%o8) 0.0426
```

Задача 1.7

Задано: вертикальна кришка закриває круглий отвір бака з водою, манометричний тиск на вільну поверхню рідини $p_M = 10,0 \text{ кПа}$ (рис.9). Радіус кришки $R = 0,15 \text{ м}$, рівень води $h_1 = 0,2 \text{ м}$, густина $\rho_{\text{води}} = 1000 \text{ кг/м}^3$. **Визначити** методом трьох команд K123 величину й точку прикладання рівнодійної сили тиску. Побудувати епюру гідростатичного тиску.

Методичні вказівки. Рівняння метода K123 для розв'язання задачі наведено в методичних вказівках [2, задача № 2, с. 7-9].

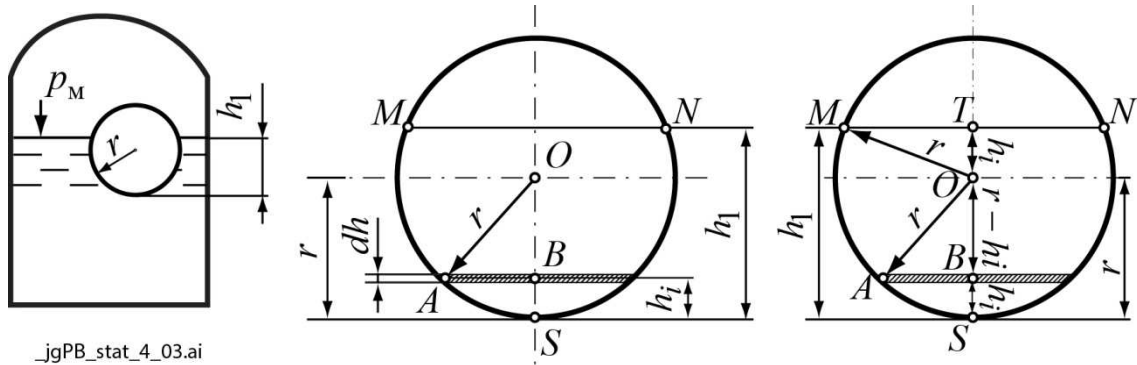


Рис. 9

Програма в MAXIMA № 1.7

```
(%i3) kill(all); ro_v:1000.0; gi:9.81; r:0.15; p_m:10000.0; h1:0.2;
(%o0) done
(%o1) 1000.0
(%o2) 9.8100
(%o3) 0.15
(%o4) 10000
(%o5) 0.2
(%i6) P1:integrate((ro_v*gi*(h1-h)+p_m)*(2.0*sqrt(r^2-(r-h)^2)),h,0,r),numer;
(%o6) 392.837
(%i7) mP1:integrate((ro_v*gi*(h1-h)+p_m)*(2.0*sqrt(r^2-(r-h)^2))*(h1-h),h,0,r),numer;
(%o7) 45.195
(%i8) hD1:mP1/P1;
(%o8) 0.115
(%i9) P2:integrate((ro_v*gi*(h1-h+r)+p_m)*(2.0*sqrt(r^2-(h)^2)),h,0,h1-r),numer;
(%o9) 194.1315
(%i10) mP2:integrate((ro_v*gi*(h1-h+r)+p_m)*(h1-h+r)*(2.0*sqrt(r^2-(h)^2)),h,0,h1-r),numer;
(%o10) 63.169
(%i11) hD2:mP2/P2;
(%o11) 0.325
(%i12) hD:(mP2+mP1)/(P1+P2);
(%o12) 0.1846
```

Created with wxMaxima.

Задача 1.8

Визначити величину і напрямок повного тиску на греблю, змочена поверхня якої обмежена по параболі; рівняння параболі відносно осей xOz : $x^2 = 4z$. Вершина параболі лежить на $H = 9$ м нижче горизонту води; дно лежить на $H_1 = 4$ м над вершиною параболі [3]. Розрахунки провести на один метр ширини греблі $b = 1$ м (рис. 10).

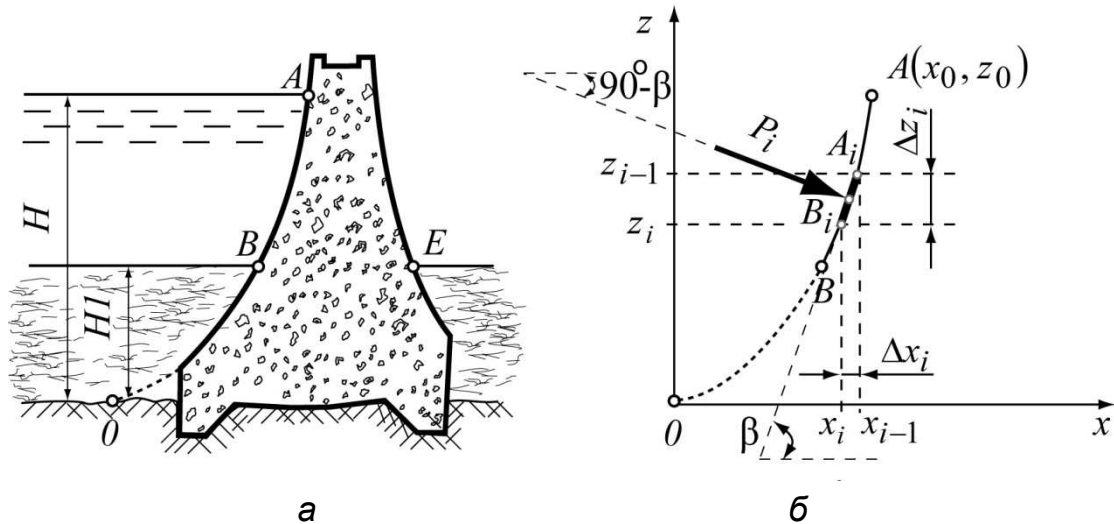


Рис. 10. Сила тиску на криволінійну поверхню, яка обмежена параболою: загальний вигляд греблі (а); параметри вектора сили тиску на i -й плоский елемент, який апроксимує криволінійну поверхню (б)

В загальному випадку нескінченно малий елемент довільної поверхні із криволінійними образуючою та твірною площею $d\omega$ в декартової системі координат має три ортогональні проекції з відповідними площами: $dx dy$, $dx dz$, $dy dz$ (рис.11,а). В локальній системі координат $x'y'z'$ розглянутий елемент поверхні має відповідні кути нахилу: кут $\angle\beta$ відносно $y'O'z'$ та кут $\angle\alpha$ відносно $y'O'x'$ (рис.11, б). Локальну систему координат $x'y'z'$ отримано плоско-паралельним переміщенням початку координат відносно основної системи координат $x y z$.

Елемент криволінійної поверхні із прямолінійною твірною, яка паралельна осі $y'O'$ і криволінійною напрямною в площині $z'O'x'$, має тільки один кут нахилу $\angle\alpha$ відносно горизонтальної площини $y'O'x'$ (рис.11, в).

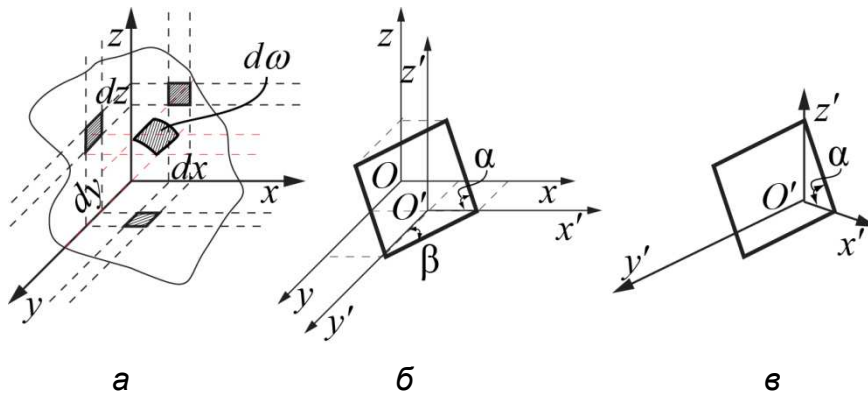


Рис.11. Ортогональні проєкції елемента площини криволінійної поверхні в ортогональній системі координат: а – Декартова система координат x,y,z ; б – локальна система координат x',y',z' ; в – елемент криволінійної поверхні із прямолінійною твірною в локальній системі координат x',y',z'

За методом трьох команд K123 вертикальна проєкція поверхні розбивається на горизонтальні прошарки висотою dz з елементами шириною dy (на рис. 11,б та рис. 11,в зображено варіанти положення окремого нескінченно малого елемента довільного горизонтального прошарка). Рівняння 3D поверхні та аналітичний вираз об'єму горизонтальної проєкції епюри на елементарні площини елементів горизонтальних прошарків дозволяють за єдиними рівняннями методу K123 перераховувати об'єми решти ортогональних проєкцій загальної епюри гідростатичного тиску.

Інакше розв'язується обернений алгоритм реалізації методу трьох команд K123 у порівнянні з тим, який було представлено для варіантів задач з чисельною реалізацією методу в публікаціях [1;2;3]. Шляхом розрахунку однієї (наприклад горизонтальної) проєкції сили тиску, через рівняння поверхні визначаються всі ортогональні проєкції сили гідростатичного тиску на елементарні площини поверхні за єдиними, універсальними за формою запису, рівняннями методу. Всі унікальні особливості форми і положення в просторі криволінійної або плоскої поверхні, зміна рівня вільної поверхні рідини, і таке інше не впливають на форму запису єдиних універсальних рівнянь методу трьох команд K123.

Розрахункова схема універсального методу трьох команд K123 базується на класичних методах вищої математики, які було розроблено в XVIII ст. Ньютоном, Лейбницем і удосконалено Ейлером та ін., в основі яких практичні розрахункові прийоми обчислення нескінченно-малих. В якості нескінченно-малої величини ми будемо використовувати величину, яка має певні фізичні розміри.

Визначення площі ортогональних проекції та координати центра ваги нескінченно малого за висотою i -го горизонтального прошарка шириною y_i показано на рис. 12. Проекції прошарка зміщено в центр ваги C'' саме для наочності відображення на малюнку. Інтегральна форма запису рівнянь методу K123 для нескінченно малого за висотою i -го горизонтального прошарка, коли остання прямує до нуля, дозволяє припустити, що тиск на ортогональні проекції прикладено в центрі ваги. Розрахункове положення ортогональних проекцій i -го прошарка із сумісним центром ваги C'' показано на рисунку 12,*l,j*.

Для криволінійної поверхні, яку утворено прямою твірною і криволінійною напрямною, еюра гідростатичного тиску має дві проекції. Приклад проекцій еюри на довільний нескінченно малий горизонтальний прошарок поверхні довжиною y_i показано на рис. 13,*a,b*. Довжина i -го прошарка визначається із загального рівняння поверхні або початкових умов. Для визначеного типу поверхні положення проекцій еюри гідростатичного тиску на i -й прошарок показано на рис. 13,*d,l,k*.

Криволінійна поверхня, яку утворено криволінійними напрямною і твірною, еюра гідростатичного тиску має три проекції (рис.13,*e*). Диференціали проекції елемента поверхні $dx dy$, $dx dz$, $dy dz$ показано на рисунку 13,*e,f,g*.

Для аналітичного розрахунку за методом трьох команд K123 наведено задачу із книги Н.К. Горчина і М.Д. Чертоусова «Гідравліка в задачах» [3, задача №38, с. 68]. Тестовий приклад розраховано в системі комп'ютерної математики MAXIMA. Чисельна реалізація метода K123 представлена в методичних вказівках [2], розрахунки запрограмовано в системі Maple.

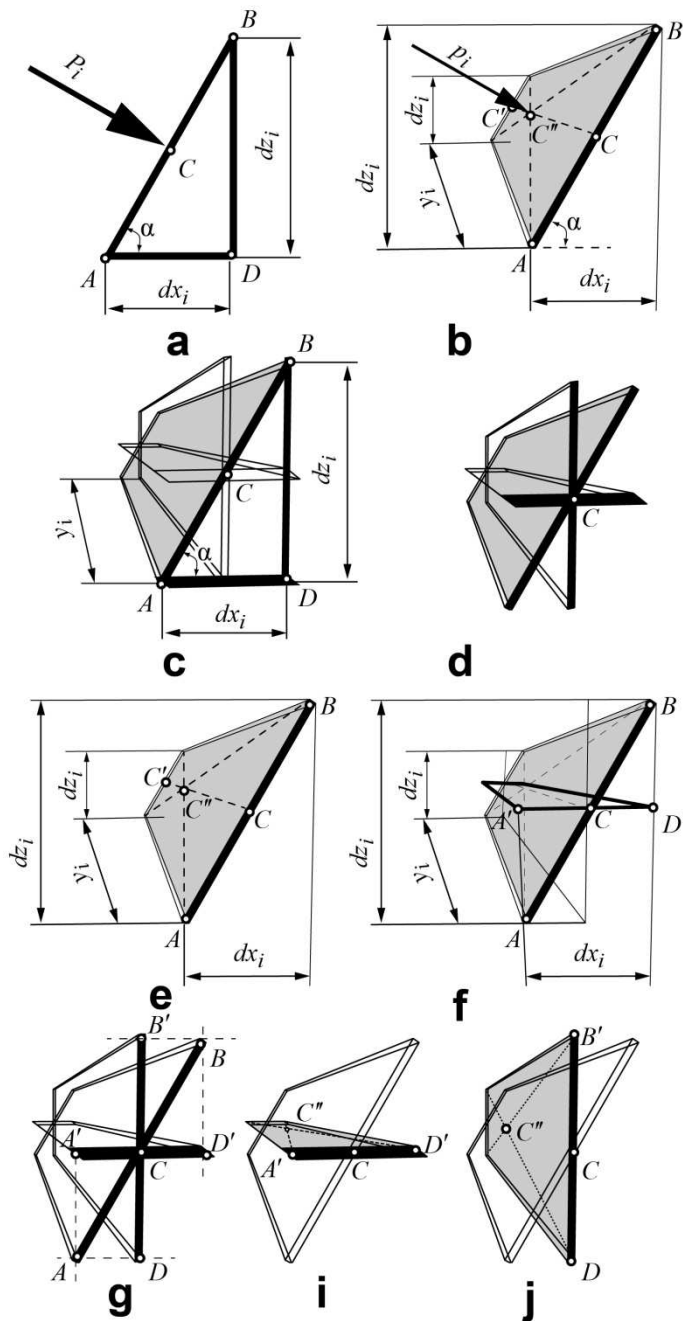


Рис.12. Ортогональні проєкції елемента площини горизонтального прошарка криволінійної поверхні з прямою твірною в ортогональній системі координат: *a* – переріз прошарка *AB* і ортогональні проєкції: *AD*, *BD*; *b* – горизонтальний *i*–й прошарок довжиною y_i ; *c* – переріз ортогональних проєкцій прошарка на yOx , zOy ; *d* – ортогональні проєкції в центрі ваги прошарка; *e* – центр ваги і горизонтальна вісь симетрії прошарка; *f* – горизонтальна проєкція в центрі ваги прошарка; *g* – горизонтальна і вертикальна проєкції в центрі ваги прошарка; *h, i, j* – центр ваги C'' проєкцій горизонтального прошарка

Методичні вказівки. Використати kill(all) для очищення пам'яті програми, команду diff – для визначення похідної для розрахунку величини об'єму вертикальної проекції епюри гідростатичного тиску в діапазоні глибин 4,0 – 9,2 м. Рівняння K1 і K2 методу K123 для горизонтальної проекції епюри гідростатичного тиску наведено в додатках 1,2. Рівняння K1 і K2 методу K123 для вертикальної проекції епюри представлено в додатках 3,4.

Програма в MAXIMA № 1.8

```
(%i20) kill(all); ro:1000.0; gi:9.81; H1:4.0; H:9.0; b:1.0;
F(h):=sqrt(4.0*h); diff(F(h),h); DIFh1(h):=1.0/(sqrt(h)); DIFh1(4.0);
(%o0) done
(%o1) 1000.0
(%o2) 9.810000000000000
(%o3) 4.0
(%o4) 9.0
(%o5) 1.0
(%o6)  $F(h) := \sqrt{4.0 h}$ 
(%o7)  $\frac{1.0}{\sqrt{h}}$ 
(%o8)  $DIFh1(h) := \frac{1.0}{\sqrt{h}}$ 
(%o9) 0.5
(%i10) Px:integrate(ro*gi*(H-h)*b,h,H1,H); Pz:integrate((ro*gi*(H-
h)*b)*DIFh1(h),h,H1,H); atan(Pz/Px)*(180/3.1415);
(%o10) 122625.0
(%o11) 52320.0
(%o12) 23.1070
(%i13) mPx:integrate(ro*gi*((H-h)^2.0)*b,h,H1,H);
mPz:integrate((ro*gi*((H-h)*F(h))*b)*DIFh1(h),h,H1,H);
(%o13) 408750.0
(%o14) 245250.0
(%i15) hDx:mPx/Px; x:H-hDx; hDz:mPz/Pz; P:sqrt(Px^2+Pz^2);
(%o15) 3.3333333
(%o16) 5.6666666
(%o17) 4.6875
(%o18) 133320.18
```

```

(%i19) Px_test:ro*gi*((H-H1)/2)*(H-H1)*b;
Pz_test:integrate(ro*gi*b*(F(h)-F(H1)),h,H1,H),numer;
P_test:sqrt(Px_test^2+Pz_test^2); atan(Pz_test/Px_test)*(180/3.1415);
(%o19) 122625.0
(%o20) 52320.0
(%o21) 133320.18
(%o22) 23.107008

```

Приклад і тестову відповідь наведено із вищеозначеного збірника задач [3, задача №31, стор. 54]. В задачнику представлено стандартний графоаналітичний розрахунок з використанням «вірьовочного трикутника» в ручному виконанні. Ці методи, безпосередньо, не дозволяють реалізувати їх в комп'ютерному розрахунку. Універсальний алгоритм K123 розроблено із урахуванням особливостей сучасних систем комп'ютерної алгебри, для впровадження сучасних методів і в навчальному процесі, і для інженерного розрахунку задач будь-якої складності.

Задача 1.9

Побудувати графік залежності Архімедової сили від радіуса зануреної наполовину кулі. Густина рідини $\rho_{\text{води}} = 1000 \text{ кг/м}^3$, щільністю $\rho_{\text{кулі}} = 500 \text{ кг/м}^3$, радіус кулі змінюється в діапазоні $r_{\text{кулі}} = 0.1 - 1.0 \text{ м}$.

Методичні вказівки. Встановити верхню межу інтеграла змінною величиною, отримати функціональну залежність і побудувати графік.

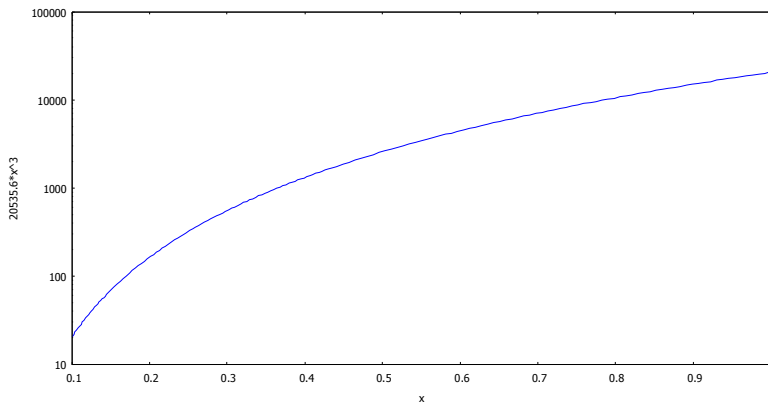
Програма в MAXIMA № 1.9

```

(%i76) V:integrate(3.14*(R^2-(R-h)^2),h,0,R);
V1(R1):=integrate(3.14*(R1^2-(R1-h)^2),h,0,R1);
(%o76) 2.093333333333333
(%o77) 
$$V1(R1) := \int_0^{R1} 3.14 (R1^2 - (R1-h)^2) dh$$

(%i78) V1(1.0);
(%o78) 2.093:
(%i79) plot2d([V1(x)*1000*9.81], [x,0.1,1],
[plot_format, gnuplot], [logy])$

```



Created with wxMaxima.

Задача 1.10

Розрахувати прискорення, з яким рухається машина, якщо різниця рівнів вільної поверхні рідини в баку дорівнює 4 см на відстані 30 см. Побудувати графік зміни рівнів при зростанні прискорення в два рази.

Методичні вказівки. Отримати функціональну залежність і побудувати графік за допомогою команди plot2d.

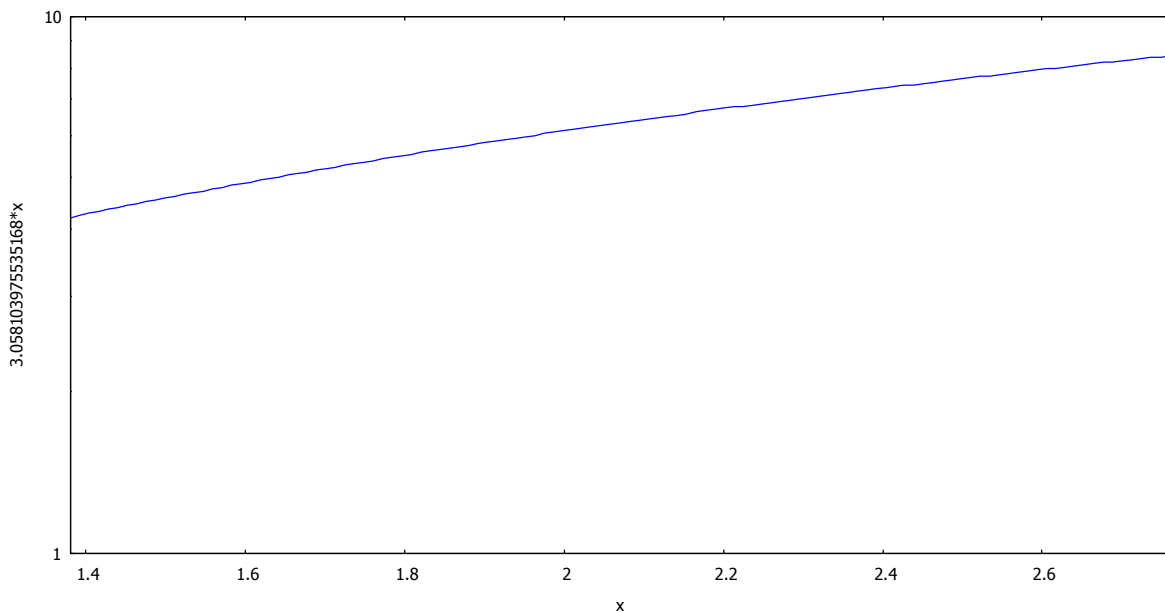
Програма в MAXIMA № 1.10

49) $h:4.0; l:30.0; g_i:9.81;$

(%i52) $j:(g_i/l)*h;$

(%i53) $f(x):=(x/g_i)*l; f(1.308);$

(%i57) $plot2d([f(x)], [x, 1.308, 2.616],$
 $[plot_format, gnuplot], [logy])\$$



Created with wxMaxima.

МЕТОД ТРЬОХ КОМАНД K123

Основні положення і розрахункові формули алгоритму K123

Виділимо два ключових моменти:

- сумарна сила гідростатичного тиску рідини за модулем дорівнює об'єму епюри тиску;
- точка дії рівнодіючої – центр тиску сумарної сили тиску на окремі шари рідини – проходить через точку проекції **центра ваги об'ємної епюри** тиску (точка F , рис. 5,а) на поверхню шара під визначеним кутом (центр тиску – точка D). Форма епюри є наочним відображенням всіх особливостей дії (гідростатичного тиску) неперервного середовища на відповідний шар площі змоченої поверхні, і проекція будується по нормалі до поверхні.

У попередніх задачах не було уточнено, що центр тиску (точка D , рис. 5,а) не співпадає із центром ваги епюри тиску (точка F , рис. 5,а). Центр ваги знаходиться в об'ємі епюри тиску, а центр тиску розташовано безпосередньо на поверхні шара поверхні і позначає місце дії рівнодіючої сили тиску. Обидві точки лежать на напрямку дії сумарної сили тиску P (рис. 5,а).

Об'єм епюри тиску в будь-якому випадку і для будь-якої поверхні (криволінійної або плоскої) обов'язково дорівнює модулю сили гідростатичного тиску.

Центр ваги об'ємної епюри в будь-якому випадку визначає координати, через які проходить лінія дії вектора сили гідростатичного тиску на поверхню (або елемента поверхні, якщо розглядається окремий шар). Аналогічна примітка, щодо поняття "елемента" поверхні відноситься також і до розрахунку координат центра ваги всієї системи елементарних епюр тиску на всі горизонтальні прошарки поверхні – які об'єднуються за алгоритмом K123 на заключному етапі розрахунку.

Алгоритм K123 чисельного (або аналітичного) розрахунку сумарної сили гідростатичного тиску рідини на елементарний шар поверхні включає таку послідовність операцій:

- розрахунок загального об'єму епюри тиску, який дорівнює величині модуля рівнодіючої (сумарної) сили гідростатичного тиску P на окремий шар змоченої поверхні;
- визначення статичного моменту рівнодіючої (сумарної) сили гідростатичного тиску $m(P)$ на елементарний шар відносно обраної точки;

- обчислення координат точки прикладання (центр тиску) h_D рівнодіючої (сумарної) сили гідростатичного тиску.

Алгоритм К123 чисельного (або аналітичного) розрахунку сумарної сили гідростатичного тиску рідини на всю площу змоченої поверхні включає такі операції:

- для плоскої поверхні виконуємо стандартні три команди розрахунку P , $m(P)$, h_D , які описано для елементарного горизонтального шара;
- для криволінійної поверхні розкладемо на ортогональні складові кожний вектор сили тиску для всіх елементарних шарів. Далі знов виконуємо стандартний трьох кроковий алгоритм – визначаємо сумарну силу і центр тиску для кожного орта;
- визначаємо рівнодіючу силу тиску і напрямок для криволінійної поверхні стандартним шляхом.

Таким чином, виконується *стандартна процедура* розрахунку P , $m(P)$ і h_D , яка складається з *трьох стандартних команд* незалежно від конкретних форм елементів поверхні. Отже, необхідно представити ці команди в загальному вигляді.

В загальному випадку на форму запису цих стандартних команд впливають закони зміни:

- густини рідини для i -го шара $f(\rho_i)$;
- поперечної ширини i -го шара $f(h_i)$;
- наявність манометричного (ваууметричного) тиску над вільною поверхнею рідини і глибина занурення i -го прошарку $f_1(h_i)$;
- плече сили гідростатичного тиску на i -тий прошарок відносно вільної поверхні рідини або початку обраної системи координат для вертикальної та бокової проекції сили тиску $f_2(h_i)$;
- h_2 - координати приведеної поверхні рідини при наявності манометричного (ваууметричного) тиску над її вільною поверхнею. Координати положення нижньої та верхньої кромки заданої зануреної поверхні - границі інтегрування, які позначаємо відповідно h_1 і h_3 .

Базовий алгоритм розрахунку K123

Формула розрахунку горизонтальної проекції сили тиску:

$$P_x = \int_{h_1}^{h_3} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(h_i) dh. \quad (K1)$$

Формула статичного моменту горизонтальної проекції сили тиску:

$$m(P_x) = \int_{h_1}^{h_3} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(h_i) f_2(h_i) dh. \quad (K2)$$

Глибина занурення центра тиску горизонтальної проекції сили:

$$h_{D_x} = \frac{m(P_x)}{P_x} = \frac{\int_{h_1}^{h_3} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(h_i) f_2(h_i) dh}{\int_{h_1}^{h_3} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(h_i) dh}. \quad (K3)$$

У практичних задачах окремі із вищезначених величин можуть бути сталими і не залежати від величини висоти стовпчика рідини над і-м шаром змоченої поверхні. У такому випадку форма запису загальних формул алгоритму K123 суттєво спрощується.

Базовий алгоритм розрахунку K123 для чисельного розрахунку

Формула розрахунку горизонтальної проекції сили тиску:

$$P_x = \sum_{h_1}^{h_3} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(h_i) \Delta h. \quad (K1')$$

Статичний момент горизонтальної проекції сили тиску рахуємо за формулою:

$$m(P_x) = \sum_{h_1}^{h_3} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(h_i) f_2(h_i) \Delta h. \quad (K2')$$

Глибина занурення центра тиску горизонтальної проекції сили:

$$h_{D_x} = \frac{m(P_x)}{P_x} = \frac{\sum_{h_1}^{h_3} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(h_i) f_2(h_i) \Delta h}{\sum_{h_1}^{h_3} f(\rho_i) g f_1(h_i) f(h_i) \Delta h}. \quad (K3')$$

Загальна структура рівняння K1 і K2 методу K123 для горизонтальної проекції епюри гідростатичного тиску наведено в додатках 1,2. Рівняння K1 і K2 методу K123 для вертикальної проекції епюри представлено в додатках 3,4.

Список літератури

1. *Константинов Ю.М.* Гідростатика. Приклади і задачі: навчальний посібник / Ю.М. Константинов, О.О. Гіжа., Ю.Д. Копаниця – К.: КНУБА, 2012. – 112 с.

2. *Копаниця Ю.Д.* Технічна механіка рідини і газу. Гідростатика. Універсальний метод розрахунку гідростатичного тиску на поверхні із застосуванням комп'ютерних програм: методичні вказівки до виконання індивідуальної роботи / укладач Ю.Д. Копаниця – К.: КНУБА, 2012. – 32 с.

3. Горчин Н.К. *Гидравлика в задачах / Н.К. Горчин, М.Д. Чертоусов. - Ленинград. "Кубуч", 1927. – 430 с.*

4. *Копаниця Ю.Д.* Комп'ютерний розрахунок сили тиску. Універсальний алгоритм трьох команд – К123. // Наук.-техн. зб. "Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки". – К.: КНУБА, 2012. – Вип.18.– С.148–163.

5 *Копаниця Ю.Д.* Розрахунок гідростатичного тиску на криволінійну поверхню. Універсальний алгоритм трьох команд – К123. // Наук.-техн. зб. "Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки". – К.: КНУБА, 2012. – Вип.20.– С.105–119.

6. *Копаниця Ю.Д.* Аналіз виміру епюри гідростатичного тиску на криволінійну поверхню. Універсальний метод розрахунку К123 // Наук.-техн. зб. "Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки". – К.: КНУБА, 2013. – Вип.21.– С.165–180.

7. *Копаниця Ю.Д.* Інтегральні рівняння методу трьох команд К123 // Наук.-техн. зб. "Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравліки". – К.: КНУБА, 2013. – Вип.22.– С.160–173.

8. *Стахин Н.А.* Основы работы с системой аналитических (символьных) вычислений Maxima. (ПО для решения задач аналитических (символьных) вычислений): Учебное пособие. – Москва: 2008. – 86 с.

9. *Ильина В.А.* Система аналитических вычислений Maxima. Для физиков-теоретиков: Учебное пособие. / В.А. Ильина, П.К. Силаев – М.: МГУ, 2007. – 115 с.

10. <http://maxima-online.org>

11. <http://www.ydk.kiev.ua>

12. http://ru.wikipedia.org/wiki/GNU_General_Public_License

13. <http://maxima.sourceforge.net/>

Метод трьох команд K123

Горизонтальна проекція епюри тиску



(A) Ширина b_i i -го прошарка

(B) Загальна висота зануреної поверхні

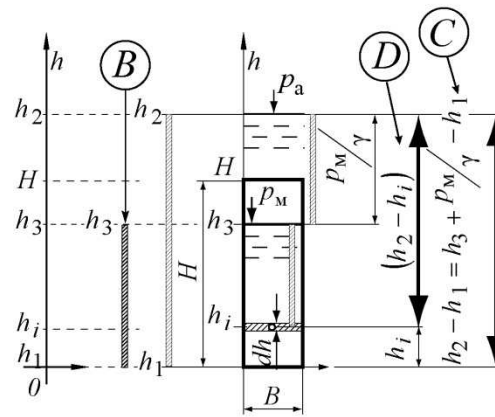
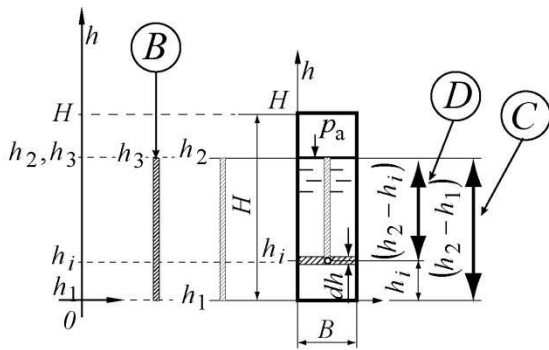
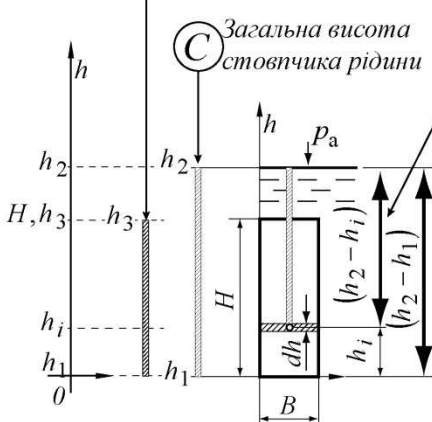
Границі інтегрування

$$P = \int_{h_1}^{h_3} \rho \cdot g \cdot f_1(h_i) \cdot f(h_i) dh$$

p_i $d\omega_i$

Горизонтальна проекція сили гідростатичного тиску (K1)

(E) Ширина $b_i = f(h_i)$ i -го прошарка визначає його площу $d\omega_i = f(h_i) \cdot dh$



Метод трьох команд K123

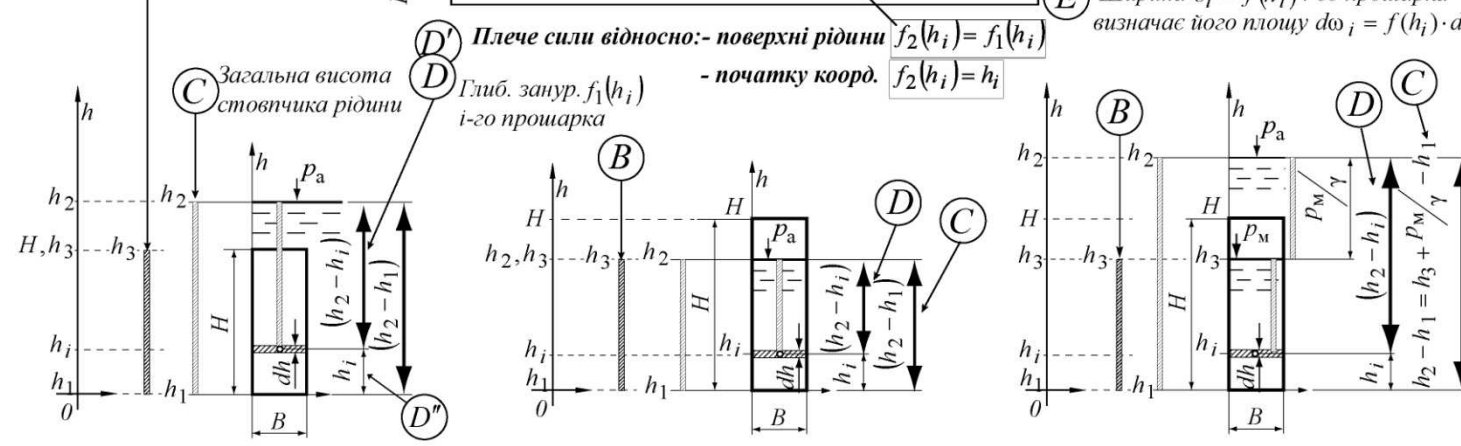
Горизонтальна проекція епюри тиску



(A) Ширина b_i i -го прошарка
 (B) Загальна висота зануреної поверхні
 (E) Ширина $b_i = f(h_i)$ i -го прошарка визначає його площу $d\omega_i = f(h_i) \cdot dh$

$$mP = \int_{h_1}^{h_3} \rho \cdot g \cdot f_1(h_i) \cdot f_2(h_i) \cdot f(h_i) \cdot dh$$

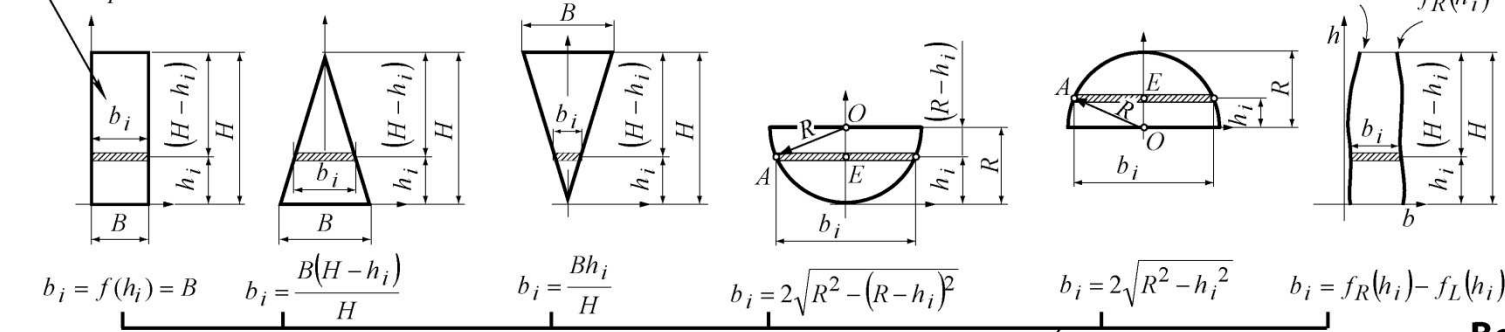
Момент горизонтальної проекції сили гідростатичного тиску (K2)



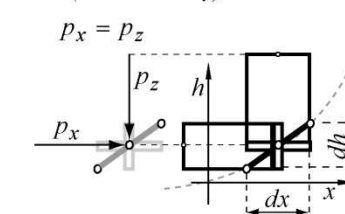
Метод трьох команд K123

Вертикальна проекція сили гідростатичного тиску

Ширина b_i i -го прошарка вертикальної проекції поверхні



Переріз вертикальної та горизонтальної проекції епюри тиску на прошарок dh поверхні (вид з боку)



Вертикальна проекція сили (K1) гідростатичного тиску

$$P_z = \int_{h_1}^{h_3} \rho \cdot g \cdot f_1(h_i) \cdot f_3'(h_i) \cdot f(h_i) dh$$

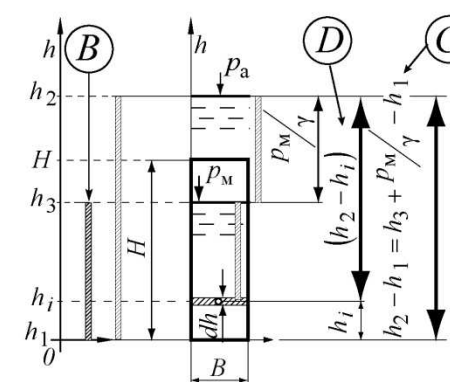
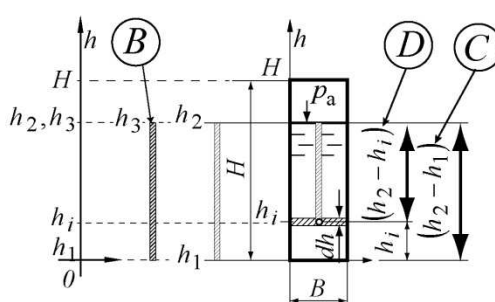
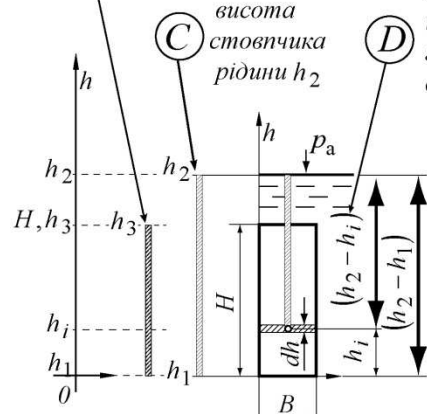
Ширина $b_i = f(h_i)$ i -го прошарка визначає його площу $d\omega_i = f(h_i) \cdot dh$

Загальна висота зануреної поверхні з h_1 по h_3

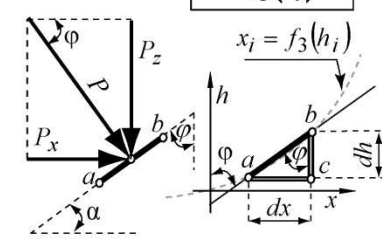
Загальна висота стовпчика рідини h_2

Глибина занурення $f_1(h_i)$ i -го прошарка dh визначає гідростатичний тиск p_i в центрі ваги

Відношення площин горизонтальної проекції прошарка до вертикальної. $\text{tg}(\angle\varphi)$ - похідна функції $x_i = f_3(h_i)$ по h_i



Визначення $\text{tg}(\angle\varphi)$ в Δabc Відношення dx і dh $dx = f_3'(h_i) \cdot dh$



Метод трьох команд K123

Момент вертикальної проекції сили гідростатичного тиску



Плеche вертикальної проекції сили гідростатичного тиску на проширочк відносно початку координат по осі "x"

(A) Ширина b_i i-го проширочк

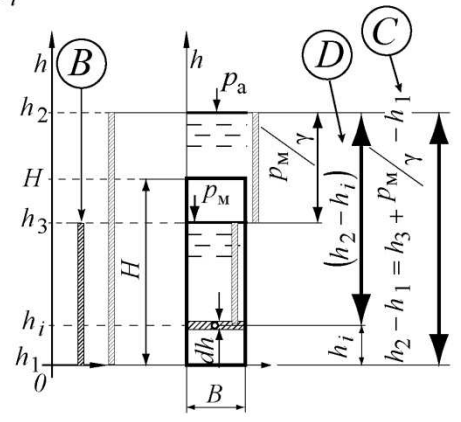
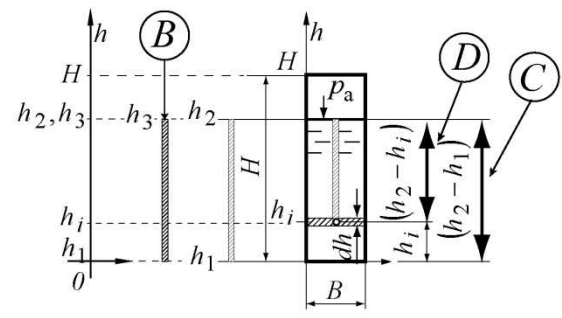
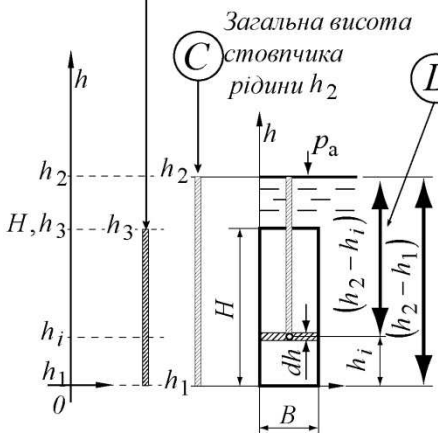
$$mP_z = \int_{h_1}^{h_3} \underbrace{\rho \cdot g \cdot f_1(h_i)}_{p_i} \cdot \underbrace{f_x(h_i)}_a \cdot \underbrace{f'_3(h_i)}_{\text{tg}(\angle\varphi)} \cdot \underbrace{f(h_i)}_{d\omega_i} dh$$

Момент вертикальної проекції сили (K2) гідростатичного тиску

(B) Загальна висота зануреної поверхні з h_1 по h_3

(F) Відношення площин горизонтальної проекції проширочк до вертикальної. Похідна $x_i = f_3(h_i)$ по h_i

(E) Ширина $b_i = f(h_i)$ i-го проширочк визначає його площу $d\omega_i = f(h_i) \cdot dh$



ДЛЯ НОТАТОК

Навчально-методичне видання

**ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА РІДИНИ І ГАЗУ.
ГІДРОСТАТИКА. ОСНОВИ РОБОТИ
В СИСТЕМІ АНАЛІТИЧНИХ РОЗРАХУНКІВ
МАХІМА. ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ**

Методичні вказівки
до виконання індивідуальної роботи
для студентів, які навчаються за напрямом підготовки
6.060101 «Будівництво» спеціальний вид діяльності
«Водопостачання і водовідведення»

Укладач **КОПАНИЦЯ** Юрій Дмитрович

Комп'ютерне верстання *Ю.Д.Копаниці*
Комп'ютерне верстання *Т.І. Кукарєвої*

Підписано до друку 2014. Формат 60 × 84 ^{1/16}
Ум. друк. арк. 1,89. Обл.-вид. арк. 2,0.
Тираж 25 прим. Вид. № 128/III-13. Зам. №

Видавець і виготовлювач
Київський національний університет будівництва і архітектури

Повітрофлотський проспект, 31, Київ, Україна, 03680
E-mail: red-isdat@ukr.net, тел. (044)241-54-22, 241-54-87

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів
Видавничої справи ДК № 808 від 13.02.2002 р.